Θέματα Απειροστικού Λογισμού 3 Σεπτεμβρίου 2017

Θέμα 1. [1] Εξετάστε αν υπάρχει το ακόλουθο όριο και, αν υπάρχει, υπολογίστε την τιμή του:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^y - y(x-1) - 1}{x^2 + y^2 - 2(x+y-1)}.$$

Θέμα 2. [1] Έστω η επιφάνεια $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 z + x\sin y + ye^{z-1} = 1\}$ και το σημείο $\bar{a} = (1,0,1) \in S$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\bar{a}$.

Θέμα 3. [1] Βρείτε ποιο ή ποια σημεία της παραβολής $x^2 - 4y = 0$ έχουν τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$, και δώστε την απόσταση αυτή.

Θέμα 4. [1.5] Βρείτε όλα τα $k \geq 0$ για τα οποία η $g(x,y,z) = x^2 + kxy + kxz + ky^2 + kz^2$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0,0)$.

Θέμα 5. [1] Υπολογίστε την παράγωγο $y'(-1)$ της συνάρτησης με $y(-1) = -1$ που δίνεται μέσω της εξίσωσης $e^{x+y^2} + y^3 = 0$.

Θέμα 6. [1] Έστω η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $f'(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= -y + xf(x) \end{aligned}$$

είναι αντιστρέψιμος κοντά στο (x_0, y_0) με αντίστροφο

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(u) \\ y &= -v + uf^{-1}(u). \end{aligned}$$

Θέμα 7. [1.5] Έστω $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

(α') Δείξτε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

(β') Βρείτε την παράγωγο κατά κατεύθυνση $\bar{v} = (v_1, v_2)$, $\|\bar{v}\| = 1$, της f στο $(0,0)$.

(γ') Δείξτε, ότι από τα (α') και (β') προκύπτει, ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Θέμα 8. [1] Έστω $(x,y) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ μια συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη με $(x(0), y(0)) = \bar{a}$, $(x(1), y(1)) = \bar{b}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη με

$$x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \leq -y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \qquad \forall \quad t \in [0,1].$$

Δείξτε ότι $f(\bar{b}) \leq f(\bar{a})$.

Θέμα 9. [1] Έστω η $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ συνεχής με $C = \bar{\gamma}([0,1])$.

(α') Έστω $(\bar{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\bar{x}_0 \in C$.

(β') Τι προκύπτει από το (α') για το C;